

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A IX-A

1. Două autovehicule A și B pornesc simultan din același punct M și se deplasează pe aceeași direcție și în același sens cu vitezele constante v_1 și v_2 ($v_1 < v_2$), descriind un drum rectiliniu d. Fie P un punct care nu aparține dreptei d, astfel încât $PM = a$ și $m(\sphericalangle PMA) > 90^\circ$. După cât timp de la pornire unghiul $\sphericalangle APB$, sub care se văd autovehiculele din punctul P, este maxim?

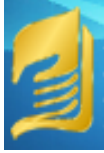
2. Calculați suma $S = \left[\frac{1^2}{2} \right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3} \right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4} \right] + \dots + 2^{2013} \cdot \left[\frac{2014^2}{2015} \right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

3. Determinați funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, știind că $1^2 f(1) + 2^2 f(2) + \dots + n^2 f(n) = \frac{n^2 (f(n) + 1)^2}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică 11/2013

4. Fie ΔABC și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, astfel încât $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1}{n}$, $n > 2$,
 $AA_1 \cap BB_1 = \{B'\}$, $BB_1 \cap CC_1 = \{C'\}$, $CC_1 \cap AA_1 = \{A'\}$. Aflați raportul $\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



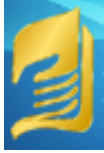
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe a, b, c și d , astfel încât $a + b = c + d$ și $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
Arătați că $a^n + b^n = c^n + d^n$, oricare ar fi numărul natural n .
2. Determinați numerele reale x cu proprietatea că $[\log_2 x] + [\log_4 x] = 3$ (unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a).
Gazeta Matematică 1/2014
3. Se consideră numerele pozitive a, b, c și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Fie u, v, w numere reale astfel încât $0 \leq u < v < w$ și punctele $U(u, f(u)), V(v, f(v))$ și $W(w, f(w))$.
Demonstrați că $UW^2 > UV^2 + VW^2$.
4. Prin înfășurarea unui dreptunghi de perimetru 1 se obține suprafața laterală a unui cilindru. Determinați volumul maxim posibil al acestui cilindru și precizați dimensiunile dreptunghiului pentru care se atinge acest maxim.
Notă: Volumul unui cilindru circular drept având raza R și înălțimea H se calculează folosind formula $V = \pi R^2 H$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele graficului funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.
2. Fie A o matrice pătratică de ordin 3 cu elemente numere întregi. Demonstrați că matricea $3A + 5I_3$ este inversabilă.

Supliment Gazeta Matematică 9/2013

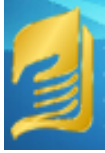
3. Folosind noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu este funcție rațională.

Notă: O funcție se numește *rațională* dacă se poate scrie ca raport a două funcții polinomiale.

Supliment Gazeta Matematică 1/2014

4. O echipă de hochei este formată din 6 titulari și 9 rezerve. Antrenorul poate face schimbări oricând, oricâte și poate schimba oricare jucător; un jucător schimbat poate reveni în joc după un timp. Timpul efectiv de joc este de 60 minute. Într-o anumită partidă, se constată la final că fiecare dintre cei 15 componenți ai echipei a jucat un același număr n de minute.
 - a) Determinați valoarea lui n .
 - b) Descrieți, folosind o matrice pătratică ce are ca elemente doar numerele 0 și 1, o modalitate în care antrenorul poate trimite în teren jucătorii astfel încât să fie respectate condițiile problemei.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII-A

1. Fie $a > 0$ și funcțiile $f, g, G : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(3 + \ln x)(5 + \ln x)}$, $g(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}$,
 $G(x) = \ln(a + \ln x)$.

a) Arătați că G este o primitivă a lui g pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $[1, \infty)$ cu proprietatea $F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$.

Supliment Gazeta Matematică 12/2013

2. Pe \mathbb{Z} definim legea de compoziție " \circ " dată prin $x \circ y = 5xy + 5(x + y) + 4$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Cercetați dacă legea " \circ " este asociativă.

b) Aflați ultimele 100 cifre din scrierea zecimală a numărului întreg $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 2013 \circ 2014$.

3. Fie grupul (\mathbb{Z}_p^*, \cdot) . Pentru un element $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$, definim funcția :

$\psi : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$, $\Psi(\hat{x}) = \hat{a} \cdot \hat{x}$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_p^*$; (p număr prim).

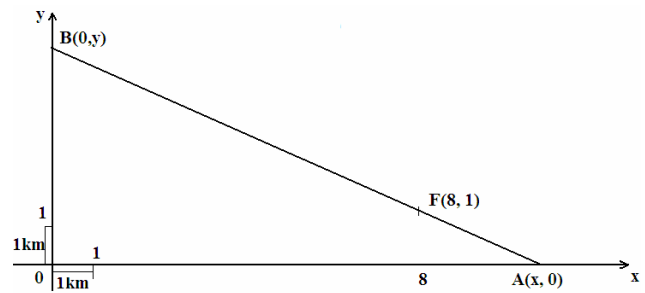
a) Arătați că ψ este bijecție.

b) Demonstrați egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} = \Psi(\hat{1}) \cdot \Psi(\hat{2}) \cdot \dots \cdot \Psi(\widehat{p-1})$.

c) Justificați că $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$.

d) Argumentați că $2017 \mid \left(\sum_{i=1}^{2016} C_{2017}^i \right)$.

4. O fabrică $F(8, 1)$ se află poziționată între două șosele perpendiculare Ox și Oy , ca în desenul alăturat. Se construiește o șosea rectilinie care să unească fabrica cu cele două șosele, astfel încât aceasta să fie de cost minim, adică lungimea $FA + FB = AB$ să fie minimă. Aflați lungimea șoselei AB de cost minim.



Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.